

Θέμα 1°

A1. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1$

(Μονάδες 6)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές ή Λανθασμένες**

(α) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α, β) .

(β) Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1.

(γ) Αν ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lambda|$.

(ε) Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με

$g(x) \neq 0$ για όλες τις τιμές του x , τότε ισχύει, τότε $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

(Μονάδες 10)

A3. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 6)

A4. Να κυκλώσετε την σωστή απάντηση σε κάθε μια ερώτηση από τις παρακάτω.

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ είναι:

A. $[-1, 1]$ B. $[-1, +\infty)$ Γ. $(-1, 1)$ Δ. $(-\infty, 1]$ E. $(-\infty, +\infty)$

β) Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι (για $h \neq 0$):

A. $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h(2x+h)}{h}$ B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ Γ. 2 Δ. x E. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h}$

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση

$h = \frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού:

A. \mathbb{R} B. $x \in A: f(x) \neq 0$ Γ. $x \in A: g(x) \neq 0$ Δ. $x \in A: f(x) > 0$ και $g(x) \neq 0$ E. $\mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 3)

Θέμα 2°

Από μια έρευνα μεταξύ 200 ανέργων για το χρόνο (σε μήνες) που είναι άνεργοι , προέκυψε ο παρακάτω πίνακας .

Κλάσεις	x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[0,.....)		22				
[....., 6)			58			
[.....,.....)						59
[.....,.....)				17		
[.....,.....)					0,91	
[.....,.....)						
Σύνολο	200		–		–	–

2Α) α) Να αποδείξετε ότι $c = 3$

(Μονάδες 3)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

(Μονάδες 7)

2Β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί % και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τις %.

(Μονάδες 9)

2Γ) Να βρεθεί το πλήθος των ανέργων που είναι χωρίς εργασία τουλάχιστον 9 μήνες.

(Μονάδες 3)

2Δ) Να βρεθεί το ποσοστό των ανέργων που είναι χωρίς εργασία το πολύ 7,5 μήνες .

(Μονάδες 3)

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2}{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -1$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1) $y = -2x + 5$ τότε :

3Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

(Μονάδες 5)

3Β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

3Γ) Να βρεθεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(h+2)^2}{(h+2)^2 + 2(h+2) + 2} - \frac{2}{5}}{h}$

(Μονάδες 5)

3Δ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2}}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της g

(Μονάδες 5)

β) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της h με $h(x) = \frac{\sqrt{6}}{x^2 + 2x + 2}$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $f(x) \cdot (\sqrt{x^2 + 4}) = 3f(x) + x^2 - 5$

4Α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = \sqrt{5}$ να βρεθεί το $f(\sqrt{5})$

(Μονάδες 7)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 3}$ $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\}$

4B) Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.

(Μονάδες 5)

4Γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\}$ ισχύει

$$\frac{(x^{2021} + 1)^2 - 5}{\sqrt{(x^{2021} + 1)^2 + 4} - 3} \geq 5$$

(Μονάδες 5)

4Δ) Να βρεθούν το σημείο της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία ίση με 150°

(Μονάδες 8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΕΡΔΙΚΟΥΡΗΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ

3A) $x=0$, $x=-2$

Γ) $\frac{8}{5}(f'(2))$

Δ) α) $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

β) $(-3, -2] \cup [0, 1)$

4A) 6

B) Ρητοποίηση της f

Δ) $M(-\sqrt{2}, \sqrt{6} + 3)$